積分を使わずに「ギブスの現象」に迫る

公立千歳科学技術大学　情報システム工学科　山林由明

はじめに

筆者は公立千歳科学技術大学の理工学部 2 年生を対象として、「フーリエ解析」、「ラプラス変換」の基礎を講ずる「工業基礎数学（選択必修科目）」を担当している。そのなかで「ギブスの現象」は不連続点をもつ矩形波をフーリエ級数近似する際に現れる「リンギング（振動的振る舞い）」として知られている。多くの教科書では、これをフーリエ級数の極限としての「正弦積分（『積分正弦』ともいう）」を用いて説明している。向学心の強い学生はともかく、微積分学を得意としない学生にとってその導出過程を追うことは容易ではない。そこで、厳密さはさておき、より多くの学生に興味を持って受講してもらえるように、ギブスの現象の近似次数を大きくしていったときのピーク値の挙動にのみ着目すれば、三角関数についての微分の知識と三角方程式の解法だけでこれに迫れることを示すことを本論の目的とする。併せて、受講学生（2 年生）に向けての「自主課題（加点課題）」とした際の取り組み状況についても報告する。

フーリエ級数展開は、有限な値を持つ周期関数 $f(t)$を、その周期(T)をもつサイン波やコサイン波の和として表すもので、これを発展させた「フーリエ解析」は、現代では物理工学のみならず幅広く応用されている。テーラー展開（マクローリン展開）が、関数が展開しようとするところで微分可能であることが前提とされているのとは異なり、フーリエ級数展開の場合は、微係数は不連続でも（関数に「折れ曲がり」があっても）、関数値が連続であれば原関数を完全に近似することができる利点を有している。さらには、ところどころに不連続があるような「普通」のデジタル信号波形にも適用することができる点で実用性は十分である。ではあるが、不連続点を近似しようとするとどうしても不連続点周辺に「リンギング」が現れてしまう。これは、近似次数を大きくしていってもなくならない。以下、まずそのリンギングである「ギブスの現象」を紹介し、一般的な説明である「正弦積分」への収束について述べる。これはフーリエ展開近似関数全体を扱っているという点で重要であるが、その導出すべてを受講学生全員に理解してもらう必要まではないように感じる。むしろ、導出の詳細はテキストを読んで自主的に学んでもらうこととし、不連続点に最も近いリンギングのピーク値を求めることに集中すれば、三角関数の微分と三角方程式だけで十分である。これはフーリエ級数 $S(x)$を微分して得られる導関数がゼロとなる点のうちで最も原点に近い変数値 x_0 を求め、それをフーリエ級数に代入して、$S(x_0)$を計算することに帰着する。近似次数を増やしていく作業は、最後はコンピュータを利用すればよい。

「ギブスの現象」

本稿では、「平衡矩形パルス列」を例として考える。これは、$x=-\pi$ から πまで を一周期とし、x が負の所では$f(x)=-1$、正の所では$f(x)=1$ となるデジタル波形で、$x=0$ におい

て−1 から +1 へ立ち上がるような不連続を持つ。このフーリエ級数展開近似は次式[1]で与えられる。

$$S_n(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+\cdots+\frac{1}{n}\sin nx\right) \qquad [1]$$

図 1 ではその矩形パルス波形に加えて、1 次から 5 次までのフーリエ級数を示している。$f(x)=1$の矩形パルスに対して近似関数がまとわりつくように振る舞っていることが見て取れる。

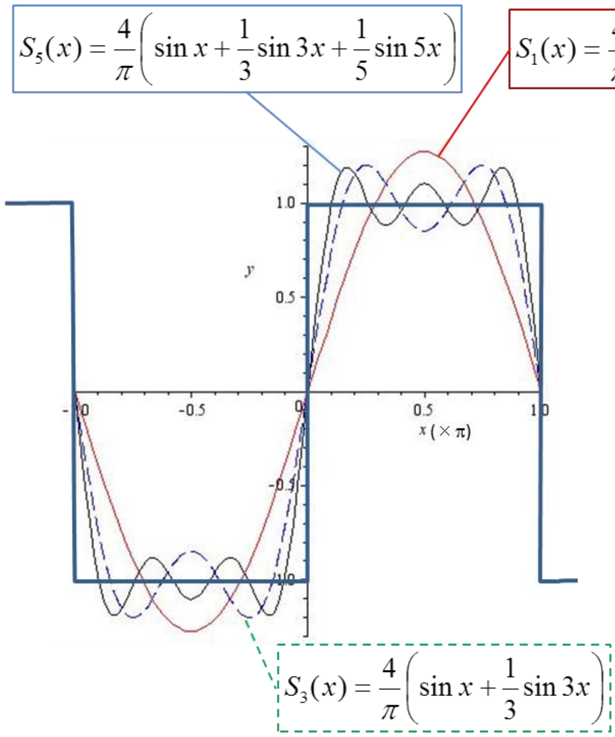

図 1 フーリエ展開次数の違いによる矩形波近似の変化

図 2 に、近似次数が 5 次から 23 次までの近似波形の変化を示す。ここで例えば「$n≦5$」は式[1]の $n=5$ までの和を取った近似関数値であることを意味している。次数が増加するに従って近似関数は関数値$f(x)=\pm 1$に十分近づき、平坦な部分が増えている一方、不連続点近傍のリンギングは、細かくなりはするものの消えることなく残っていることがご理解頂けよう。このリンギングに着目するために、図 3 をご覧頂きたい。これには 1 次近似に相当する$f(x)=(4/\pi)\sin x$を点線で示し、それぞれ 3, 7, 21 次のフーリエ級数を実線で示している。ここで注目頂きたいのは、それぞれの近似関数の頂点のうち、y 軸に最も近い第 1 頂点の振る舞いである。第 1 次近似の正弦波$f(x)=(4/\pi)\sin x$では、$x=\pi/2$において$f(\pi/2)=(4/\pi)\sin(\pi/2)=4/\pi$を唯一頂点としてとることは明らかである。次数の増大とともに、図中の右上の曲線矢印が示すように、この第 1 頂点は徐々に低くなりながら y 軸に近づき、

無限大次数の極限では $y = 1.18$ 辺りに向かって近づいていくように見える。このリンギングが無限大次数の極限でも残ることが「ギブスの現象」と呼ばれている [1)]。

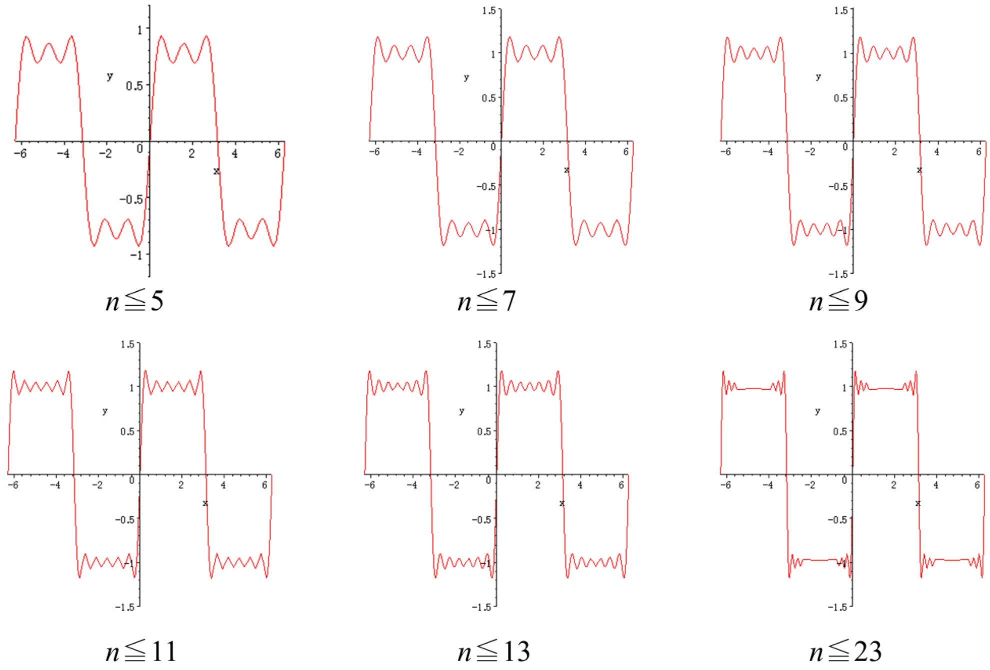

図 2 フーリエ展開次数の違いによる矩形波近似の変化 (2)

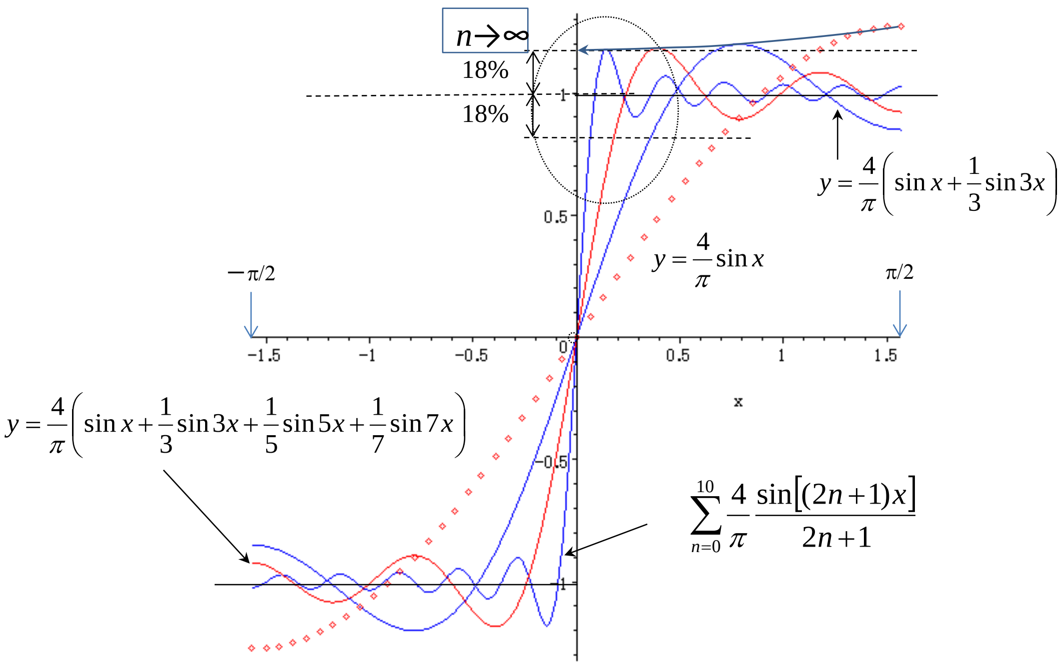

図 3 段差（−1〜1）におけるフーリエ級数展開近似関数の例

積分を用いる一般的な解析

まず、この無限大次数での挙動を調べる「正攻法」を紹介する。そのために、参考文献(2)に従って、式[1]の級数を積分で表現することから始める [2)]。

$$S_{2n+1}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(2k+1\right)}{2k+1}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\int_{0}^{x}\cos\left(2k+1\right)\xi\,d\xi$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{x}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{i(2k+1)\xi}+\sum_{k=0}^{n}e^{-i(2k+1)\xi}\right)d\xi \qquad [2]$$

この二つの級数は公比$exp(\pm 2i\xi)$の等比級数なので、次のように変形できる。

$$\sum_{k=0}^{n}e^{i(2k+1)\xi}=e^{i\xi}\left(e^{0\xi}+e^{2i\xi}+e^{4i\xi}+\cdots+e^{2n\xi}\right)=e^{i\xi}\frac{1-e^{2i(n+1)\xi}}{1-e^{2i\xi}}=\frac{e^{i\xi}}{e^{i\xi}}\frac{1-e^{2i(n+1)\xi}}{e^{-i\xi}-e^{i\xi}}$$
$$=e^{i(n+1)\xi}\frac{e^{-i(n+1)\xi}-e^{i(n+1)\xi}}{e^{-i\xi}-e^{i\xi}}=e^{i(n+1)\xi}\frac{\sin(n+1)\xi}{\sin\xi}$$
$$\sum_{k=0}^{n}e^{-i(2k+1)\xi}=e^{-i\xi}\left(e^{-0\xi}+e^{-2i\xi}+e^{-4i\xi}+\cdots+e^{-2n\xi}\right)=e^{-i\xi}\frac{1-e^{-2i(n+1)\xi}}{1-e^{-2i\xi}}=\frac{e^{-i\xi}}{e^{-i\xi}}\frac{1-e^{-2i(n+1)\xi}}{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}$$
$$=e^{-i(n+1)\xi}\frac{e^{i(n+1)\xi}-e^{-i(n+1)\xi}}{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}=e^{-i(n+1)\xi}\frac{\sin(n+1)\xi}{\sin\xi}$$

よって、式[2]は次のようになる。

$$S_{2n+1}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{x}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{i(2k+1)\xi}+\sum_{k=0}^{n}e^{-i(2k+1)\xi}\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{x}\left(e^{i(n+1)\xi}+e^{-i(n+1)\xi}\right)\frac{\sin(n+1)\xi}{\sin\xi}d\xi$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{x}\frac{2\cos\left\{(n+1)\xi\right\}\sin\left\{(n+1)\xi\right\}}{\sin\xi}d\xi=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{x}\frac{\sin\left\{2(n+1)\xi\right\}}{\sin\xi}d\xi \qquad [3]$$

ここで、x が充分小さいときは、分母の $\sin x$ を x で置き換えることができるので、

$$S_{2n+1}\simeq\frac{2}{\pi}\int_{0}^{x}\frac{\sin\left\{2(n+1)\xi\right\}}{\xi}d\xi=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{x}\frac{\sin\left\{2(n+1)\xi\right\}}{2(n+1)\xi}2(n+1)d\xi \qquad [4]$$

と表される。ここで、$u=2(n+1)\xi$、$v=2(n+1)x$とおくと

$$S_{2n+1,x\approx 0}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{x}\frac{\sin\left\{2(n+1)\xi\right\}}{2(n+1)\xi}2(n+1)d\xi=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{v}\frac{\sin u}{u}du \qquad [5]$$

となって、「積分正弦[3)]」

$$\mathrm{Si}(v) = \int_0^v \frac{\sin u}{u} du \qquad [6]$$

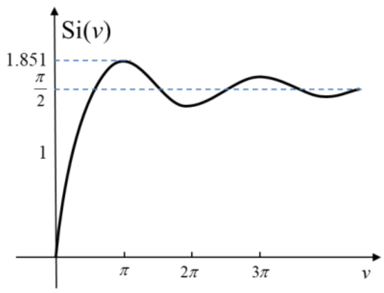

図 4　積分正弦関数

が登場する。図 4 に示すように、この関数は変数 v が πのときに最大の極大値(1.851)をとる。これは、変数を x にもどすと、$\pi = 2(n+1)x$が第 1 頂点を与えることを意味し、無限に続く離散的な点列

$$\cdots,\ x_n = \frac{\pi}{2(n+1)},\ x_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+2)},\ \cdots$$

において、近似関数の列 S_{2n+1}, S_{2n+2}・・・は一定値$S_{1st\ peak} = \frac{2}{\pi} \times 1.851 = 1.178$を与える。つまり、十分小さい x の場合、すなわちこれは近似次数 $2n+1$ が十分大きい場合を意味するが、表そうとする直線 $f(x) = 1$ より約 18%上がりすぎるとなることが示された。ただ、この節に示した導出を、大教室において数学を専門としない学生諸君の大多数に理解してもらうことは容易ではない。

積分を用いない「ギブスの現象」第 1 頂点の追跡

近似関数$S_{2n+1}(x)$の全体像はさておき、この第 1 頂点のみに着目すれば、この座標を求めるのには三角関数の微分と三角方程式を解くことのみが必要であって、積分は不要である。たとえば、7 次近似 $S_7(x)$を以下に例として考えることにする。

$$S_7(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x\right] \qquad [7]$$

これの第 1 頂点を求めるには、式[7]の導関数＝ 0 とおく方程式を立て、それを満たす最小の x_0 を求めればよい。各項を微分した結果に対して「三角関数の和積の公式」を適用し続ければ、結果として 3 つのコサインの積＝0 の形をした式[8]の三角方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{dS_7(x)}{dx} &= \frac{4}{\pi}(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x) = \frac{4}{\pi}(2\cos x \cdot \cos 2x + 2\cos x \cdot \cos 6x) \\ &= \frac{4}{\pi}\cdot 2\cos x(\cos 2x + \cos 6x) = \frac{4}{\pi}\cdot 2\cos x(2\cos 2x \cdot \cos 4x) = \frac{4}{\pi}\cdot 4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = 0\end{aligned} \qquad [8]$$

この解を求めるのは容易である。$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$ のうち、x を 0 から増やしていくときに最初に 0 になるのは $\cos 4x$ なので、$4x = \pi/2$、すなわち $x = \pi/8 \fallingdotseq 0.393$ に第 1 頂点が現れ

ると判明する。その時のピーク値は

$$S_7\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{4}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\frac{1}{5}\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\frac{1}{7}\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right]\cong 1.184 \qquad [9]$$

と求められる。このように、式[8]に相当する三角方程式がコサイン因子の乗積の形になるのは近似次数$2n+1$が2^m-1と書ける場合に限られるが、高い近似次数における第 1 頂点の動向を調べるためには問題にはならないと考える。すると、$S_{2^m-1}(x)$の導関数は次式[10]に示すように和積の公式より m 個の因子の積で表される。

$$\frac{dS_{2^m-1}(x)}{dx}=\frac{4}{\pi}2^{m-1}\prod_{k=0}^{m-1}\cos\left(2^k x\right) \qquad [10]$$

これをゼロにする最小の x_0 は$\cos(2^{m-1}x)=0$の解である。つまり、

$$2^{m-1}x_0=\frac{\pi}{2}$$
$$x_0=\frac{\pi}{2^m} \qquad [11]$$

が第 1 頂点の x 座標として求められ、これをフーリエ級数$S_{2^m-1}(x)$に代入すれば第 1 頂点の高さ（y 座標値）が得られることになる。図 5 にはこのようにして求めた第 1 頂点の軌跡を $S_{63}(\pi/64)=1.1791$ まで示している。ただし、次数が上に述べた2^m-1以外の次数についての結果も含めているが、その導出は割愛する。

令和 4 年の学部 2 年の選択受講生（169 名）に対して、図 5 の結果を示しつつも式[10]以降の分析は示さず、「自主課題」として「$S_n(x)$ $(n>7)$ の最初のピークの x,y 座標を求めよ」を出題した。その結果、39 名（23%）から解答や質問などが提出された。図 6 はその結果を含めてプロットしたものである。

数名の学生は自力で式[10]に到達し、コンピュータを駆使して第 1 頂点の軌跡に挑んでくれた。その結果として、π/1024 よりも小さい x に関して $S(x_0)=1.17898$ に収束する結果が得られている。これは、積分正弦で求めた前節での結論を数値計算で確認したものといえる。多くの学生は、エクセルに膨大な表を作って計算していたが、python などのソフトウェアを駆使して解答してくれた例もあった。また、式[10]のようなコサイン因子の乗積形にならない場合の三角方程式の解法に取り組んでくれた例もあった。このように、決まった「正しい解答」がない課題は学生諸君の自主的に学問に取り組む姿勢を育てるのに役立つと考えている。ただ、多様な答案があり得る今回の出題では採点に時間がかかる問題があった。今後の課題としては、解答に含むべき着眼点を明確に絞って出題することで、解答の多様さを許

容しつつ採点もしやすいようにすべきと考える。

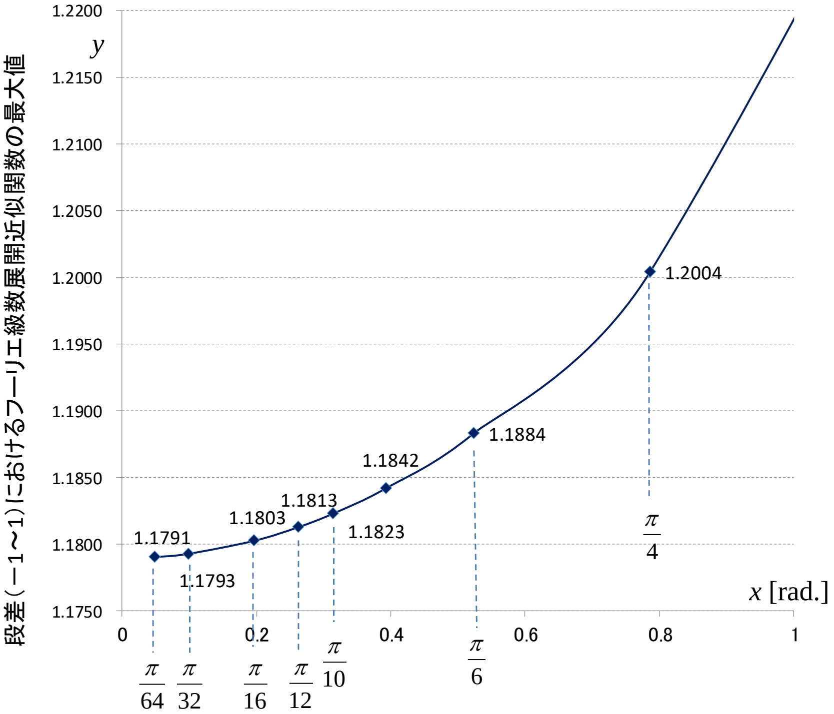

図 5 フーリエ展開近似の第 1 頂点の位置(横軸)とその高さ(縦軸)

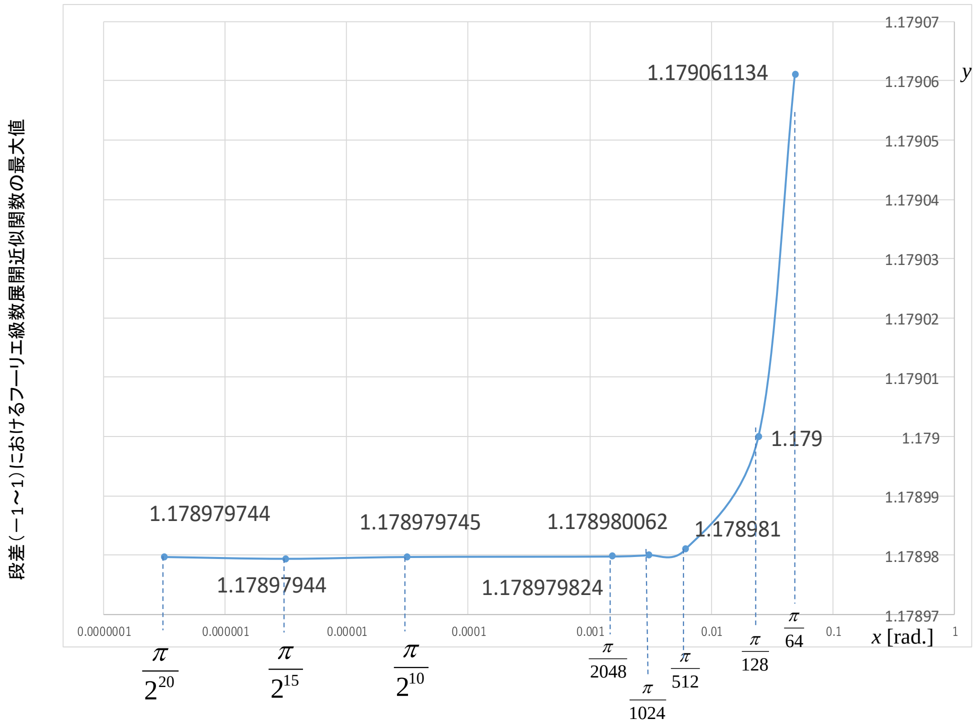

図 6 フーリエ展開近似の第 1 頂点の位置とその高さ(微小な x について)

まとめ

フーリエ級数展開において、「ギブスの現象」は「不連続点をもつ矩形波をフーリエ級数近似する際に現れるリンギング（振動的振る舞い）」として知られている。これを学部 2 年生に向けて講義する際における工夫について述べた。多くの教科書では、これをフーリエ級数の極限としての「正弦積分」を用いて説明しているが、微積分学を得意としない理工学部生にとってその導出過程を追うことは容易ではない。そこで、より多くの学生に興味を持って受講してもらえるように、ギブスの現象の近似次数を大きくしていったときの極大値の挙動にのみ着目すれば、三角関数についての微分の知識と三角方程式の解法だけで、その第 1 頂点が一定値に収束する事実が理解できることを示した。

令和 4 年の学部 2 年の選択受講生（169 名）に対して、「自主課題」として「$S_n(x)$ ($n > 7$) の最初のピークの x,y 座標を求めよ」を出題した。その結果、39 名（23%）から解答や質問などが提出され、積分正弦で求めた「正統的な」結論を数値計算で確認できた。このように、決まった「正しい解答」がない課題は学生諸君の自主的に学問に取り組む姿勢を育てるのに役立つと考えている。今後の課題としては、解答に含むべき着眼点を明確に絞って出題することで、解答の多様さを許容しつつ採点もしやすいように改善すべきと考える。

参考文献と脚注

(1) この現象は A. マイケルソン（「マイケルソン・モーレーの実験」でノーベル賞を受賞したアメリカの実験物理学者）が「ネイチャー」誌に載せた質問（1898 年）に対する J. W. ギブスの答えに含まれていたことにちなんで彼の名が冠されている。しかし、ポール・J・ナーインはその著書「オイラー博士の素敵な数式」（小山信也訳）の第 4 章「フーリエ級数」において、実は当時ケンブリッジ大学の学生だったヘンリー・ウィルブラハム(1825-83)が 1848 年の論文においてその 50 年も前にすでに証明していたことを指摘している。

(2) アーノルド・ゾンマーフェルト著、増田秀行　訳　「ゾンマーフェルト理論物理学講座　VI　物理数学　－偏微分方程式論－」、第 1 章§2　不連続な級数の例・ギブスの現象と一様でない収束、pp.8-13、講談社（昭和 44 年）.

(3) “正弦積分”というほうが一般的かもしれないが、参考文献 2 では「積分正弦」が使われている。